代数幾何学シンポジウム記録
1979年度 pp.77-84

$1 \leq \kappa(V) \leq \dim V - 1$ を満たす代数多様体の変形

足利 正 (宮城工専)

基礎体は常に複素数体 $\mathbb{C}$ とする。我々は小平次元 κ の代数的変形の問題を次の形で考える。

(問) n 次元代数多様体の smooth 族 $f: X \to Y$ が1つ与えられた時、その任意の fibre の κ は、generic fibre の κ に等しいか？

ここでは、特に $1 \leq \kappa(\text{generic fibre}) \leq n-1$ の時上記の問を、より低い次元の $\kappa = 0$ の多様体の変形と退化の問題に帰着させる。そして、ある特別な場合に上記の問が肯定的に解けることを示す。詳細は[1]を参照されたし。

§1. 定義と結果

$f: X \to Y$ を n 次元代数多様体の smooth 族 (i.e. f is proper smooth surj. morphism of connected fibres of relative dimension n) とする。$\omega_{X/Y}$ を relative canonical sheaf, $N(X/Y) = \{i \in \mathbb{Z}^+ ; f_* \omega_{X/Y}^{\otimes i} \neq 0\}$ とする時、

$i \in N(X/Y)$ に対して，$f^* f_* \omega_{X/Y}^{\otimes i} \to \omega_{X/Y}^{\otimes i}$ により，
Y 上の有理写像 $X \overset{g_i}{\dashrightarrow} \mathbb{P}(f_* \omega_{X/Y}^{\otimes i})$ が定まる。
さて，$Z_i = g(X)$ とおく時；

<u>定義 1</u>　$f : X \to Y$ の相対的小平次元 $\kappa(X/Y)$ を

$$\kappa(X/Y) = \begin{cases} \max\limits_{i \in N(X/Y)} \dim Z_i - \dim Y & \text{if } N(X/Y) \neq \phi \\ -\infty & \text{if } N(X/Y) = \phi \end{cases}$$

と定義する。

$\kappa(X/Y)$ は，f の generic fibre の κ と言ってもよい。
さて，Lieberman - Sernesi [2] による次の定理を思い出す。

<u>定理 1</u> ([2])　$f : X \to Y$ が上記の時，Y のある countable intersection of nonempty Zariski open sets Y' があって，(i) $\kappa(X_y) = \kappa(X/Y)$ for $^\forall y \in Y'$, (ii) $\kappa(X_y) > \kappa(X/Y)$ for $^\forall y \in Y \setminus Y'$.

<u>注</u>　[2] は，上記定理に対応する結果を complex spaces 間の flat family に対する L - dimension に対して証明しているが，証明に若干の gap があると思われる。
ただし我々の状況設定では，base change theorem と Iitaka estimate より比較的簡単に証明できる。

定理1をみる時，κの変形不変性予想とは，実は$Y'=Y$を言っていることに注意しよう。そこで今

<u>予想 $D_{n,k}$</u>　$f: X \to Y$をn次元代数多様体の族で$\kappa(X/Y)=k$とする。この時，$^\forall y \in Y$に対し$\kappa(X_y)=\kappa(X/Y)$である。(i.e. $Y'=Y$)

とおいてみる。まず，$D_{n,n}$が正しいことは定理1より明らかである。それ以外の場合は，fibreの構造に関して何らかの情報を得なければどうしようもないが，実は次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>　$f: X \to Y$をn次元代数多様体のsmooth族で$1 \leq \kappa(X/Y) \leq n-1$とする。このとき，任意の$y \in Y$に対して，fibre X_yは次の構造を持つ。；X_yのある非特異モデルX_y^*と代数多様体W及びfibre space $\psi: X_y^* \to W$があって，

(i) $\dim W = \kappa(X/Y)$　(ii) WのあるZariski open set W'があって$^\forall y \in W'$に対してfibre $\psi^{-1}(w)$は"quasi-specialization of parabolic varieties"である。

ここにquasi-specialization of parabolic varieties (以下q.s.p.と略す)とは；

<u>定義2</u>　variety V が q.s.p. とは ある非特異多様体 M と非特異曲線 C、及び fibre space $\varphi : M \to C$ があって

(i) V は φ の smooth fibre 又は degenerate fibre の既約成分の1つに同型　(ii) $\kappa(M/C) = 0$

定理の条件によって f の general fibre は通常の Iitaka fibration を持つ。上記の fibration は、general fibre の持つ Iitaka fibration の極限として構成される。(⇒§2)。定理は予想 $D_{n,k}$ に対して以下のことを言っている。まず、次の代数多様体の退化族に関する κ の下半連続性予想を思い出そう。

<u>予想 $L_{n,k}$</u>；$D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$，$D^* = D \setminus \{0\}$，$M$ を複素多様体とする。$\varphi : M \to D$ を相対次元 n の flat morphism で D^* 上 smooth、且 φ はある代数的な morphism を局所化したものとする。そして $\forall y \in D^*$ に対し $\kappa(M_y) = k$ とする。この時、$M_0^{(i)}$ を singular fibre $M_0 = \varphi^{-1}(0)$ の任意の既約成分とすれば $\kappa(M_0^{(i)}) \leq k$ である。

注　$n=1$ の時 上記予想が正しいことは well-known. $n=2$ の場合も，上野氏の講演で述べられたように，ほとんど正しい。(ただし，今のところ fibre が abel 曲面の時，projective という仮定がいるようである)

さて，我々の結果は次のとおり。

定理の系　(n, k) を $1 \leq k \leq n-1$ を満たす正整数の組とする。もし $D_{n-k,0}$，$L_{n-k,0}$ が正しければ，$D_{n,k}$ は正しい。

∵　$f: X \to Y$，$1 \leq \kappa(X/Y) \leq n-1$ とする時，$^{\forall}y \in Y$ に対し，定理の filtration $\varphi: X_y^* \to W$ を考えれば
$\kappa(X_y) = \kappa(X_y^*) \leq \kappa(\varphi$ の general fibre$) + \dim W \leq \kappa(X/Y)$.
一方，定理 1 より　$\kappa(X_y) \geq \kappa(X/Y)$．　　Q.E.D.

系　$D_{n,n-1}$ は正しい。

§2. 定理の証明の方針

ここでは，base variety Y が非特異曲線 S である時のみ述べる。(Y が一般次元の時は適当な base change により，この場合に帰着される。)

$N \gg 0$ に対して，有理写像 $g = g_N$ の不確定点除去（図1）

（図1）
$$\begin{tikzcd} & X^* \arrow[r, "h\ (\text{induced morphism})"] \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "g'"] & T \arrow[d, "\tau：正規化"] \\ X \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \subset \mathbb{P}(f_* \omega_{X/S}^{\otimes N}) \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

（図2）
$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_s^* \arrow[rr, "\widetilde{h}_s = h|\widetilde{X}_s^*"] \arrow[d] \arrow[drr] & & \widetilde{T}_s = h_s(\widetilde{X}_s^*) \arrow[d] \\ X_s \arrow[rr, dashed, "g_s"] \arrow[dr] & & \widetilde{Z}_s \subset Z_s = \pi^{-1}(s) \arrow[dl] \\ & \{s\} & \end{tikzcd}$$

を行なう。$^\forall s \in S$ に対して（図1）を s 上に制限したものが（図2）である。ここに，$\widetilde{X}_s^*$ は fibre X_s の σ による strict transform，$\widetilde{Z}_s = g'(\widetilde{X}_s^*) = g_s(X_s)$ である。（注：$X_s \not\subset$ g の不確定領域は容易）。この時 $\widetilde{h}_s : \widetilde{X}_s^* \to \widetilde{T}_s$ が求める fibration であることが次のようにしてわかる。

(I_0) $\dim \widetilde{T}_s = \kappa(X/S)$ であること。（則ち，$\widetilde{Z}_s$ が $Z_s = \pi^{-1}(s)$ の既約成分の1つであること）；

$P(X_s) = \bigoplus_i P(X_s)_i$，$P(X_s)_i = f_* \omega_{X/S}^{\otimes i} \underset{\mathcal{O}_S}{\otimes} \mathbb{C}$ とおくと，これは X_s の canonical ring $R(X_s) = \bigoplus_i H^0(X_s, \omega_{X_s}^{\otimes i})$ の graded-$\mathbb{C}$-subalgebra となる。さて今，

$$\kappa(P(X_s)) \Leftarrow \begin{cases} \max_i \dim \operatorname{Proj} P(X_s)^{[i]}, & \text{if } \exists i,\ P(X_s)_i \neq 0 \\ -\infty & \text{, otherwise} \end{cases}$$

と定義する。（ここに $P(X_s)^{[i]} = \bigoplus_j \{P(X_s)_i\}^j$）。

$\widetilde{Z}_s = \operatorname{Proj} P(X_s)^{[N]}$，且 $N \gg 0$ より $\dim \widetilde{Z}_s = \kappa(P(X_s))$ となる。今，（Iitaka estimate の類似で）ある

意味において漸近的に $\dim_{\mathbb{C}} P(X_s)_m \sim m^{\kappa(P(X_s))}$ が示せる。S は非特異曲線故 $\omega_{X/S}^{\otimes i}$ は局所自由で $\dim P(X_s)_m = \operatorname{rank} \omega_{X/S}^{\otimes m}$. 一方, S の十分 general な点 t をとれば, $P(X_t) = R(X_t)$, $\kappa(X_t) = \kappa(X/S)$ となる故, X_t に対する通常の Iitaka estimate より $\operatorname{rank} \omega_{X/S}^{\otimes m} \sim m^{\kappa(X/S)}$. よって $\kappa(X/S) = \kappa(P(X_S)) = \dim \widetilde{Z}_S = \dim \widetilde{T}_S$.」

(2.) $\widetilde{h}_S$ の general fibre が g. s. p. であること ; S の十分 general な点 t では $h_t : X_t^* \to T_t$ は surjective で X_t の N-canonical map に birational. よって飯高の定理から h_t の general fibre は $\kappa = 0$ である。このことから, $\kappa(X^*/T) = 0$ となる。そこで $\widetilde{h}_S$ の general fibre $\widetilde{h}_S^{-1}(w)$ $(w \in \widetilde{T}_S)$ を1つ決め, w を通る T 上の curve C を十分 general にとり, C の正規化 $\widehat{C}$ で base change $X^* \times_C \widehat{C} \to \widehat{C}$ を行なう。$X^* \times_C \widehat{C}$ の dominant な既約成分 M をとれば, $M \to \widehat{C}$ は, $\kappa(M/\widehat{C}) = 0$ であって, $\widehat{h}_S^{-1}(w)$ をその fibre の既約成分の1つとして含むことがわかる。」

参考文献

[1] T. Ashikaga, The deformation behaviour of the Kodaira dimension of algebraic manifolds, to appear in Tohoku Math. J.

[2] D. Lieberman and E. Sernesi, Semicontinuity of L-dimension, Math. Ann., 225 (1977), 77-88